**Diferensial sebagai hampiran pertama**

**Pengertian Diferensial**

Lambang untuk turunan fungsi dengan = dan △y = f(x + △x) - f(x) dapat diberikan tafsiran rasio antara dua diferensial dy dan dx. Dengan mengambil x tetap dan mendefinisikan dx sebagai suatu peubah yaang dapat diberi sebarang nilai, maka untuk suatu fungsi f yang diferensiabel di x, dan dy didefinisikan dengan dy = f '(x) dx.

Pada kasus ini dx = △x, merupakan perubahan dari x menjadi x + △x dan △x merupakan bilangan yang bernilai positif atau negatif. Perubahan dari y sebesar △y (dy ≠ △y) terjadi bila x mengalami perubahan sebesar △x, sehingga △y = f(x+△x) - f(x). Karena dy ≠ △y dan diasumsikan dy ≈ △y, maka f(x + △x) ≈ f(x) + f '(x) △x. Selanjutnya, f(x + △x) ≈ f(x) + f '(x) △x dikenal sebagai hampiran diferensial.

Contoh. Dengan menggunakan hampiran diferensial tentukan sin 320 .

Penyelesaian. Andaikan, f(x) = sin x sehingga f '(x) = cos x.

Ambil, x = 30 , untuk △x = 20 , maka x + △x = 320

Karena, 20 ≈ 0,0349066, maka

sin 320 ≈ sin 300 + cos 300 . 20

≈ 0,5000 + 0,8660 . 0,0349 = 0,5000 + 0,0302

≈ 0,5302

Jadi, sin 320 ≈ 0,5302.

Contoh. Dengan menggunakan hampiran diferensial tentukan f(x) =

Penyelesaian. f(x) =

Misal x = 125 dan △x = dx = 2, maka x +△x = 127 dan

f(x) + △x = .

Karena f(x) = ⇒ f '(x) = 1/3 x-2/3 .

Sehingga ≈ + 1/3 (125)-2/3 . (2)

≈ 5 + 0.026667

≈ 5,026667

Jadi, ≈ 5,026667.

**Hampiran Taylor**

Nilai fungsi polinom pada suatu titik dapat dihitung melalui sejumlah hingga penjumlahan dan perkalian. Sebaliknya fungsi-fungsi seperti trigonometri, logaritma dan eksponen tidak dapat dihitung dengan mudah seperti pada fungsi polinom. Karena itu fungsi polinom sering digunakan untuk menghampiri fungsi-fungsi di atas. Pada kaitan ini nilai fungsi dihampiri dengan nilai polinom hampiran pada suatu titik tertentu. Salah satu polinom yang sering digunakan untuk menghampiri nilai suatu fungsi adalah polinom Taylor. Metode untuk menentukan nilai hampiran nilai suatu fungsi digunakan pendekatan polinomial orde-n Taylor.

Polinomial Taylor orde n pada a adalah polinomial orde ke-n diberikan oleh persamaan.

Pn(x) = f(a) + f '(a)(x-a) + (x-a)2 + ... + (x - a)n

Dengan polinomial Taylor orde-n tersebut, rumus yang digunakan untuk menghampiri f(x) adalah

f(x) f(a) + f '(a)(x-a) + (x-a)2 + ... + (x - a)n

Contoh 1. Misal f(x) = sin x, dengan menggunakan polinomial Taylor berorde 3, tentukan sin 320 sampai 5 tempat desimal.

Penyelesaian. Jika f(x) = sin x, maka

f '(x) = cos x; f ''(x) = - sin x ; f '''(x) = - cos x

320 = 32/180 π, dengan demikian x = 32/180π, maka:

(x – 1/6 π) = π – 1/6 π = π = π

Dengan menggunakan polinomial Taylor di atas dengan x = 320 dan a = 300 maka diperoleh

sin 320 = 0,50000 + 0,86602 (1/90 π) - 0,25000 (1/90 π)2 - 0,14434 (1/90 π)3

Untuk π ≈ 3,14159 dan 1/90 π ≈ 0,03491 maka diperoleh :

sin 320 ≈ 0,50000 + 0,86602 (0,03491) - 0,25000 (0,03491)2 - 0,14434 (0,03491)3

≈ 0,52992

Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa sin 320 ≈ 0,52992

Contoh 2. Dengan menggunakan polinom Taylor ber-orde 3 tentukan sampai 5 tempat desimal.

Penyelesaian. Misal f(x) = ∛127, maka f '(x) = 1/3 x-2/3 f''(x) = -2/9 x-2/3 ; f'''(x) = 10/27 x-2/3.

Untuk x = 127 ⟶ ∛ x = ∛127 dan a = 125 ⟶ ∛125 = 5

Dengan menggunakan polinomial Taylor di atas dengan x = 127 dan a = 125 maka diperoleh

≈ 5 + 1/3(125) -2/3 (127-125) - 2/18(125) -2/3(127-125)2 +10/162(125) -2/3(127-125)3

≈ 5 + 0.026666 - 0.000142 + 0.0000019

≈ 5.02653

**L A T I H A N**

I. Dengan menggunakan hampiran diferensial, tentukan:

a. cos 590

b. sin 630

c. tan 460

d. sec 330

e. csc 420

II. Dengan Dengan menggunakan polinom Taylor ber-orde 3 tentukan sampai 5 tempat

desimal dari :

a. sin 280

b. cos 630

c. tan 430

d. sec 330

e. csc 290

III. Dengan menggunakan hampiran diferensial atau polynomial Taylor, selesaikan soal-

soal berikut.

a. Keping piring logam dipanasi, sehingga jari-jarinya berubah dari 5 cm menjadi

5.05 cm. Tentukan nilai pendekataan pertambahan luas piring logam tersebut.

b. Sebuah bola logam dimasukkan ke dalam bejana es, sehingga jari-jarinya

menyusut dari 14 cm menjadi 13,4 cm. Tentukan nilai pendekatan penyusutan

volume bola.

c. Sebuah kubus logam dipanaskan, sehingga rusuk-rusuknya mengembang dari 25

cm menjadi 25,8 cm. Tentukan nilai pendekatan pertambahan volume kubus.